PENGGUNAAN TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS UNTUK MENGKONSTRUKSI BARISAN KONVERGEN

S K R I P S I

Disusun dalam Rangka Menyelesaikan Studi Strata 1

untuk memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh

Nama	**: Sugeng Wibowo**
Nim	**: 4150402028**
Program Studi	**: Matematika**
Jurusan	**: Matematika**

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2006

ABSTRAK

Sugeng Wibowo (4150402028), **Penggunaan Teorema Bolzano Weierstrass Untuk Mengkonstruksi Barisan Konvergen.** Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Semarang, 2006.

Barisan adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real ($f : N \to R$). Dalam barisan terdapat konsep kekonvergenan barisan. Pengujian kekonvergenan suatu barisan dapat dilakukan dengan teorema Bolzano-Weierstrass. Teorema ini mengatakan setiap barisan yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen. Kaitan antara barisan konvergen dan barisan terbatas juga penting untuk dikaji lebih lanjut.

Permasalahan yang diangkat adalah bagaimana kaitan antara barisan terbatas dan barisan yang konvergen disamping yang paling pokok adalah bagaimana menentukan suatu barisan konvergen atau tidak menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass.

Penelitian ini dilakukan melalui tinjauan pustaka terhadap buku-buku atau literatur. Dari tinjauan pustaka tersebut, kemudian dibahas materi-materinya secara mendalam.

Hasil pembahasan masalah tersebut adalah bahwa suatu barisan yang konvergen merupakan barisan terbatas tetapi barisan yang terbatas belum tentu konvergen. Dalam menentukan kekonvergenan suatu barisan dengan teorema Bolzano-Weierstrass kita tunjukkan dulu barisan tersebut terbatas atau tidak, setelah itu kita uji kekonvergenannya.

MOTTO DAN PERUNTUKAN

MOTTO

"Jadikan sabar dan sholat sebagai penolongmu"(Q.S Al Baqoroh: 45)

" Lebih baik buruk ada, daripada bagus tapi tak ada"

" Berani bertaruh untuk menjadi pemenang"

PERUNTUKAN

Puji syukur kepada Allah swt atas terselesainya skripsi ini.

Inilah karya yang harus kulakukan untuk menjadikan diriku sebaik-baiknya.

Kuperuntukan karya ini kepada:

1. *Ayah (Alm) dan Mama Tri Dj atas doanya.*
2. *Keluarga S.A. Hasan.*
3. *Jelitaku Rina Andriani.*
4. *Guru dan sahabatku.*

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas limpahan petunjuk dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul**”Penggunaan teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan Konvergen”**.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang, bapak Drs. Kasmadi Imam S., M.S.
2. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang, bapak Drs. Supriono, M.Si.
3. Pembimbing I, bapak Drs. Moch Chotim, M.S. yang telah memberikan bimbingan, dan arahan kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.
4. Pembimbing II, bapak Drs. Wuryanto, M.S. yang telah memberikan bimbingan, dan arahan kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.
5. Ayah (alm) dan ibu yang senantiasa mendoakan serta memberikan dorongan baik secara moral maupun spiritual dan segala yang tak ternilai.
6. Keluarga S.A. Hasan yang telah memberikan semangat dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Jelitaku Rina Andriani *(a woman to love)* yang telah memberikan waktu, perhatian dan semua yang tak terlupakan sehingga penulis ingin segera menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabatku Wahyu T.H. dan Denik Agustito yang tak henti-hentinya memberikan solusi dan semangat kepada penulis.

9. Teman-temanku Ali, Wawan, Asih, Cahya, Diana, Etie, Raras, Erni, Solikin, Mufid, dan semua angkatan 2002, terima kasih atas semuanya.
10. Kelurga Besar ” Baitul Jannah Cost ” Bapak Yadi, M. Azinar, M. Ridwan, U.D. Gandhi dan Bambang yang tiada henti memotivasi penulis agar segera menyelesaikan skripsi ini.
11. Orang-orang yang tanpa sengaja memberikan inspirasi, motivasi, dan semangat agar cepat diselesaikannya skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap skripsi ini bermanfaat dan dibaca.

Semarang, April 2006

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG MASALAH

Barisan adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real (f : N$\rightarrow$R). Barisan sebagai salah satu bagian dari matematika memiliki sifat-sifat yang sangat menarik untuk kita kaji lebih lanjut. Matematika sebagai salah satu ilmu yang sangat penting peranannya dalam berbagai bidang kehidupan dan disiplin ilmu, maka matematika memerlukan adanya pengembangan yang lebih lanjut agar ilmu tersebut dapat terus berkembang. Dalam setiap perkembangan ilmu pengetahuan, setiap manusia dituntut untuk bisa menemukan sesuatu yang baru yang merupakan kelanjutan dari ilmu pengetahuan itu sendiri, sehingga ilmu tersebut tidak berhenti pada satu titik kulminasi, karena sifat ilmu pengetahuan yang selalu mengalami perubahan dari waktu ke waktu.

Barisan sebagai salah satu bagian dari matematika telah mengalami berbagai perkembangan ke arah yang lebih spesifik dengan munculnya sifat-sifat dasar dari barisan bernilai real salah satunya adalah kekonvergenan barisan. Dalam menguji suatu barisan konvergen atau tidak dapat kita lakukan dengan menggunakan teorema Bolzano-Weiestrass. Teorema ini mengatakan bahwa setiap barisan terbatas mempunyai mempunyai barisan bagian yang konvergen. Dari teorema Bolzano-Weierstrass tersebut tentunya kita akan mengkaji lebih jauh mengenai keterbatasan suatu barisan dan bagaimana hubungannya dengan barisan yang konvergen. Lebih jauhnya yang akan banyak dikaji dalam skripsi ini adalah tentang bagaimana mengkonstruksi / membangun suatu barisan tersebut konvergen ataupun tidak menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass.

Dari uraian di atas maka penulis ingin mengangkat judul "**Penggunaan Teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan Konvergen** ", sebagai judul skripsi.

B. PERMASALAHAN

Apakah kaitan antara barisan konvergen dengan barisan terbatas dan bagaimana menentukan kekonvergenan suatu barisan menggunakan teorema Bolzano-Weiestrass?

C. TUJUAN PENELITIAN

Mengetahui hubungan antara barisan konvergen dengan barisan terbatas dan untuk mengetahui bagaimana menentukan suatu barisan konvergen dengan teorema Bolzano-Weiestrass.

D. MANFAAT PENELITIAN

Mendapatkan suatu wawasan dan pengetahuan tentang pengujian kekonvergenan barisan bernilai real dengan menggunakan teorema Bolzano-Weiestrass.

E. SISTEMATIKA PENULISAN SKRIPSI

Penulisan skripsi nantinya akan dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir.

Bagian awal, memuat halaman judul, abstrak, halaman pengesahan, halaman motto, halaman peruntukan, kata pengantar, dan daftar isi.

Bagian isi terbagi atas 5 bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Membahas tentang alasan pemilihan judul, permasalahan yang diangkat, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB II LANDASAN TEORI

Mencakup pembahasan materi-materi pendukung yang digunakan dalam pemecahan masalah.

BAB III METODE PENELITIAN

Memaparkan tentang prosedur dan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menemukan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dam pemecahan masalah, penarikan simpulan.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini berisikan pembahasan dan analisis dari penelitian.

BAB V PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang ditujukan untuk pembaca umumnya dan bagi penulis sendiri khususnya.

Bagian akhir berisikan daftar pustaka sebagai acuan penulis dan lampiran-lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Urutan Bilangan Real

Definisi 2.1

Dipunyai $a,b \in P$ dengan P adalah himpunan bilangan positif.

(i) jika $a - b \in P$, maka $a > b$ atau $b < a$

(ii) jika $a - b \in P \cup \{0\}$, maka $a \geq b$ dan $a \leq b$

(Bartle, 1994:29)

Teorema 2.1.

Jika $0 < c < 1$ dan $m, n \in N$ maka $c^m < c^n$ jika dan hanya jika $m > n$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$Dipunyai $c^m < c^n$.

Andaikan $m \leq n$.

Jelas $n - m \geq 0$.

Jadi $c^m < c^n \Leftrightarrow 1 < c^{n-m}$.

Jelas $0 < 1 < c^{n-m}$.

Hal ini kontradiksi dengan $0 < c < 1$.

Jadi $m > n$.

$(\Leftarrow)$ Dipunyai $m > n$.

Jelas m-$n > 0$.

Jadi $0 < c^{m-n} < 1^{m-n}$

$$\Leftrightarrow 0 < \mathrm{c}^{\mathrm{m-n}} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\mathrm{c}^{\mathrm{m}}}{\mathrm{c}^{\mathrm{n}}} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \mathrm{c}^{\mathrm{m}} < \mathrm{c}^{\mathrm{n}}$$

Jadi $c^m < c^n$.

B. Nilai Mutlak

Definisi 2.2

Jika x suatu bilangan real, nilai mutlak x yang dituliskan $|x|$ didefinisikan sebagai berikut.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ untuk } x \geq 0 \\ -x \text{ untuk } x < 0 \end{cases}$$

(Darmawijaya 2006:40)

Teorema 2.2 (ketidaksamaan segitiga)

Jika $x,y \in R$, maka $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(Darmawijaya, 2006:40)

Bukti:

$$\begin{aligned} 0 \leq |x| + |y| &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x|.|y| + |y|^2 \\ &= (|\mathrm{x}| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Jadi terbukti $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Akibat 2.2

Untuk setiap $x,y \in R$, berlaku

(i) $\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$

(ii) $|x - y| \leq |x| + |y|$

(Darmawijaya, 2006:41)

i. Karena $|x| = |x - y + y| + |b|$ maka $|x| - |y| \leq |x - y|$ …………………1

Karena $|y| = |y - x + x| \leq |y - x|$

$= |-(y - x)| + |x|$

$= |x - y| + |x|$

maka $|y| - |x| \leq |x - y| \Leftrightarrow -(|x| - |y|) \leq |x - y|$ ……………………….2

dari 1 dan 2 diperoleh

$\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$.

ii. Berdasar teorema ketaksamaan segitiga diperoleh

$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

C. Lingkungan

Definisi 2.3

Dipunyai $a \in R$ dan $\varepsilon > 0$ maka lingkungan ε dari a adalah himpunan

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in R : |x - a| < R\}$$

(Bartle, 1994:41)

Contoh 2.1

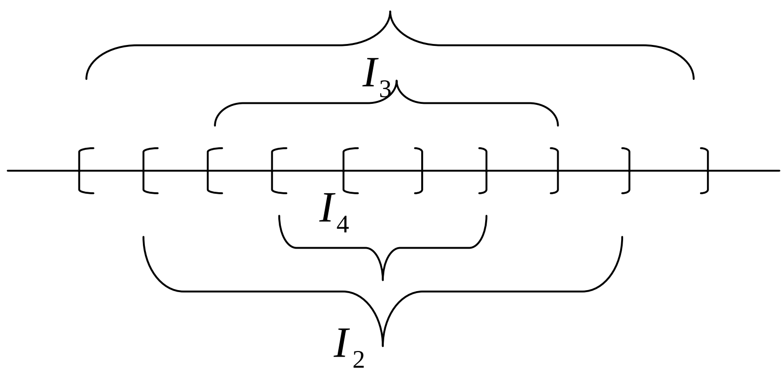
Selang buka $(0,2) \subset R$ merupakan lingkungan yang berpusat di $a = 1$ dengan $\varepsilon = 1$.

D. Interval bersarang

Barisan dari interval $I_n, n \in N$ dikatakan bersarang jika mengikuti rantai inklusi sebagai berikut

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

atau dapat digambarkan dalam gambar berikut



Gambar 1. bagan interval bersarang

Contoh 2.2

jika $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], n \in N$, maka $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk masing-masing *n* jadi interval tersebut adalah bersarang.

E. Barisan Bilangan

Definisi 2.4

Barisan bilangan real (barisan di R) adalah fungsi pada himpunan bilangan asli N yang daerah hasilnya di dalam himpunan bilangan real R.

(Bartle, 1994:67)

Lebih jauhnya dapat dijelaskan sebagai berikut:

Dipunyai fungsi f : $N \rightarrow R$.

Jelas $R_f = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$

Barisan bilangan tersebut adalah (f(1), f(2), f(3), …).

Perhatikan (f(1), f(2), f(3), …) $\neq$ (f(1), f(3), f(2), …).

Ekspresi (f(1), f(2), f(3), …) disingkat $(f(n))_{n \in N}$ disebut barisan yang dibangun oleh fungsi f. Jelas bahwa urutan elemen-elemen pada barisan tidak boleh ditukar (berbeda dengan teori himpunan).

Contoh 2.3

Suatu barisan disajikan dengan 5 unsur pertama, yaitu: (2, 4, 6, 8, 10, …).

Jelas (2, 4, 6, 8, 10, …) = (2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, …).

Jadi (2, 4, 6, 8, 10, …) = $(2n)_{n \in N}$.

Jadi barisan terdiri dari elemen-elemen yang terurut. Jika ada dua barisan yang memiliki elemen yang sama dapat terjadi kemungkinan bahwa kedua barisan tersebut tidak sama. Hal ini dapat ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 2.4

Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ mempunyai elemen-elemen balikan dari bilangan bulat positif yaitu

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...,\frac{1}{n},... \qquad (1)$$

Barisan di mana

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ jika n ganjil,} \\ \frac{2}{2+n} \end{cases}$$

jika n genap mempunyai elemen-elemen

$$1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{5},... \qquad (2)$$

Elemen-elemen dari barisan-barisan (1) dan (2) adalah sama, tetapi kedua barisan tidak sama.

Definisi 2.5

Jika X = (x_n) dan Y = (y_n) adalah suatu barisan bernilai real maka:

1) Jumlahan barisan X + Y = ($x_n + y_n$: n $\in$ N).
2) Pengurangan barisan X - Y = ($x_n - y_n$: n $\in$ N).
3) Hasil kali barisan X .Y = ($x_n y_n : n \in N$).
4) Jika $c \in R$ kita definisikan perkalian X dengan c, $cX = (cX_n : n \in N)$.

5) Jika $Z = (z_n)$ adalah sebuah barisan bernilai real dengan $z_n \neq 0$ untuk setiap $n \in N$, maka kita definisikan pembagian dari X dan Z, X/Z = $(x_n / z_n : n \in N)$.

(Bartle, 1994:67)

Contoh 2.5

Jika X dan Y adalah suatu barisan.

X = (2, 4, 6, …, 2n, …), Y = $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$.

maka didapat

X + Y = $\left(\frac{3}{1}, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, ..., \frac{2n^2+1}{n}, ...\right)$,

X – Y = $\left(\frac{1}{1}, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, ..., \frac{2n^2-1}{n}, ...\right)$,

X.Y = (2, 2, 2, …, 2, …),

3X = (6,12,18, …, 6n, …),

X/Y = (2, 8, 18, …,2n^2, …).

F. Limit Barisan

Definisi 2.6

Dipunyai $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sebuah barisan bilangan real. Dikatakan s_n menuju limit L (dengan n mendekati tak hingga), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan N positif sedemikian hingga

$$|s_n - L| < \varepsilon \ (n \geq N).$$

Jika s_n mendekati limit L kita tulis

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L$$

atau

$$s_n \to L \quad (n \to \infty).$$

(Goldberg, 1976:29)

Definisi 2.7

Dipunyai barisan bilangan real $(x_n)_{n \in N}$. Suatu x $\in$ R merupakan limit barisan $(x_n)_{n \in N}$ ditulis $(x_n)_{n \in N} \to$ x jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(n)$ (x_n) terletak dalam lingkungan $V_\varepsilon(x)$.

Selanjutnya jika $(x_n)_{n \in N} \to$ x, dikatakan barisan $(x_n)_{n \in N}$ konvergen ke x. Jika $(x_n)_{n \in N}$ tidak mempunyai limit, barisan ini dikatakan divergen.

(Bartle, 1994:70)

Definisi 2.8

Jika suatu barisan bernilai real $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ mempunyai limit L, dapat dikatakan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke L.

(Goldberg, 1976:33)

Definisi 2.9

Barisan (s_n) dikatakan konvergen ke *s*, jika dan hanya jika:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in N) \ni |s_n - s| < \varepsilon, \text{ apabila } n > N_0.$$

Notasi:

Barisan (S_n) konvergen ke s ditulis

1. $S_n \to s$ dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} S_n = s$

2. $(S_n) \to s$.

Contoh 2.6

Dipunyai $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ dengan $(s_n) = \frac{1}{n}$.

Tunjukkan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ mempunyai limit 0.

Penyelesaian

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Bila $n \geq K(\varepsilon)$ maka diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Jadi } \left|s_n - 0\right| &= \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}. \\
&\leq \frac{1}{K(\varepsilon)} \\
&= \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in N \ni \left|s_n - 0\right| < \varepsilon$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$.

Jadi $\frac{1}{n} \to 0$.

Jadi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Definisi 2.10 (kriteria kedivergenan)

Diberikan barisan bilangan real (a_n). Pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen

(i) (a_n) tak konvergen ke $a \in R$

(ii) Terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $K(\varepsilon) \in N$ berlaku $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ apabila $a \in R$.

G. Ekor Barisan

Definisi 2.11

Jika X = $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ adalah barisan bilangan real dan jika m adalah bilangan asli, maka ekor dari barisan X

$$X_m = (x_{m+n} : n \in N) = (x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, ...)$$

Contoh 2.7

Ekor 3 barisan X = (2,4,6,8,10,12,…,2n,…) adalah

barisan X_3 = (8,10,12,14,…,2n+6,…).

Teorema 2.3

Dipunyai $(x_n)_{n \in N}$ barisan bilangan-bilangan real dan $m \in N$. Barisan X_m konvergen jika dan hanya jika $(x_n)_{n \in N}$ konvergen.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Dipunyai $(x_n)_{n \in N}$ konvergen.

Tulis $(x_n)_{n \in N} \to x$.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Pilih $K \in N$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K$.

Jelas $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K - m$.

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in N \ni |x_k - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K - m$.

Jadi $X_m \to x$.

$(\Leftarrow)$ Dipunyai X_m konvergen.

Tulis $X_m \to y$.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Pilih $K \in N$ sehingga $|x_k - x| < \varepsilon$ apabila $k \geq K - m$.

Jelas $|x_n - y| < \varepsilon$ apabila $n \geq K$.

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in N \ni |x_n - y| < \varepsilon$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$.

Jadi $(x_n)_{n \in N} \to y$.

Jadi Barisan X_m konvergen jika dan hanya jika $(x_n)_{n \in N}$ konvergen.

H. Kemonotonan Barisan

Definisi 2.12

Barisan a_n dikatakan

i. naik apabila $a_n \leq a_{n+1}$ untuk semua n.

ii. turun apabila $a_n \geq a_{n+1}$ untuk semua n.

suatu barisan yang naik atau turun disebut monoton.

(Leithold, 1991:12)

Contoh 2.8

(1) Barisan $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ adalah barisan naik.

(2) Barisan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ adalah barisan turun.

Definisi 2.13 (himpunan terbatas)

(i) Himpunan $A \subset R$ dan $A \neq \phi$ dikatakan terbatas ke atas (*upper bound*) jika terdapat bilangan real *k* sehingga berlaku

$$a \leq k$$

untuk setiap $a \in A$: *k* disebut batas atas (*upper bound*) himpunan A.

(ii) Himpunan $A \subset R$ dan $A \neq \phi$ dikatakan terbatas ke bawah (*lower bound*) jika terdapat bilangan real *l* sehingga berlaku

$$l \leq a$$

untuk setiap $a \in A$: *k* disebut batas bawah (*lower bound*) himpunan A.

(iii) Himpunan $A \in R$ dikatakan terbatas (*bounded*) jika *A* terbatas ke atas dan terbatas ke bawah.

(Darmawijaya 2006:43)

Mudah dipahami bahwa jika *A* himpunan terbatas ke atas dengan *k* sebagai batas atasnya, maka setiap bilangan real k_1 dengan $k_1 \geq k$ merupakan batas atas pula, karena

$$a \leq k \leq k_1$$

untuk setiap $a \in A$. Oleh karena itu, jika *A* merupakan himpunan tebatas ke atas, maka himpunan tersebut mempunyai batas atas paling kecil yang disebut batas atas terkecil, disingkat Sup (*suprema*) himpunan *A*.

Dengan cara yang sama, jika *A* himpunan terbatas ke bawah dengan *l* sebagai batas bawahnya, maka setiap bilangan real l_1 dengan $l_1 \leq l$ merupakan batas bawah pula, karena

$$l_1 \leq l \leq a$$

untuk setiap $a \in A$. Oleh karena itu, jika *A* merupakan himpunan tebatas ke bawah, maka himpunan tersebut mempunyai batas bawah paling besar yang disebut batas bawah terbesar, disingkat Inf (*infima*) himpunan *A*.

Definisi 2.14

Suatu barisan bilangan-bilangan real $(x_n)_{n \in N}$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan M > 0 sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap n $\in N$.

(Bartle, 1994:78)

Teorema 2.4

Jika $(x_n)_{n \in N}$ suatu barisan konvergen maka $(x_n)_{n \in N}$ terbatas.

Bukti:

Dipunyai $(x_n)_{n \in N}$ konvergen.

Tulis $(x_n)_{n \in N} \rightarrow$ x.

Pilih $\varepsilon = 1 > 0$.

Pilih K(1) $\in$ N sehingga $|x_n - x| < 1$ apabila $n \geq K(1)$.

Jelas $|x_n| - |x| \leq |x_n - x| < 1$

Jadi $|x_n| < |x| + 1$ apabila $n \geq K(1)$.

Tulis M = sup $\{|x_1|, ..., |x_{k+1}|, |x| + 1\}$.

Jadi $\exists M > 0 \ni |x_n| \leq M \forall x \in N$.

Jadi $(x_n)_{n \in N}$ terbatas.

Teorema 2.5

Suatu barisan yang monoton terbatas adalah konvergen.

Bukti:

Misalkan (a_n) monoton naik

Dipunyai barisan (a_n) monoton naik dan terbatas di atas.

Tulis A = (a_n : $n \in N$) $\subseteq R$

Jelas A terbatas di atas.

Tulis a = sup A.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Jelas a - ε bukan suatu batas atas A.

Pilih $n_0 \in N \ni a - \varepsilon <$ a_{n_0} .

Dipunyai $(a_n)_{n \in N}$ monoton naik.

Jelas $a_n > a_{n_0}$ $\forall n > n_0$.

Jadi a - ε < a_{n_0} < a_n $\leq$ a < ε .

Jadi $\forall$ ε >0 $\exists$ $n_0 \in N$ $\ni$ $|a_n - a| < \varepsilon$ maka n>n_0 .

Jadi $(a_n)_{n \in N}$ $\rightarrow$ a.

Jadi a_n adalah suatu barisan yang konvergen.

Misalkan (a_n) monoton turun

Dipunyai barisan (a_n) monoton turun dan terbatas di bawah.

Tulis A = (a_n : $n \in N$) $\subseteq R$

Jelas A terbatas di bawah.

Tulis b = Inf A.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Jelas b + ε bukan suatu batas bawah A.

Pilih $n_0 \in N \ni a_{n_0} < b + \varepsilon$.

Dipunyai $(a_n)_{n \in N}$ monoton turun.

Jelas $a_n < a_{n_0} \ \forall n > n_0$.

Jadi $b \le a_n < a_{n_0} < b + \varepsilon$ apabila $n > n_0$.

Jadi $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in N \ni |a_n - b| < \varepsilon$ apabila $n > n_0$.

Jadi $(a_n)_{n \in N} \to b$.

Jadi a_n adalah suatu barisan yang konvergen.

I. Barisan bagian barisan bilangan-bilangan real

Definisi 2.15

Dipunyai barisan bilangan-bilangan real X = $(x_n)_{n \in N}$ dan $r_1 < r_2 < r_3, ... < ....$ barisan bilangan asli yang naik kuat. Barisan X' = $\left(x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, ..., x_{r_n}, ...\right)$ disebut barisan bagian X.

Sebagai contoh dipunyai X = $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$.

Berikut adalah contoh barisan bagian dari X:

- $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n\in N} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right)$,
- $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n\in N} = \left(\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\ldots.\right)$,
- $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in N} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\ldots\right)$.

Pada contoh berikut adalah yang *bukan* barisan bagian dari X.

- $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\ldots\right)$,
- $\left(\frac{1}{1},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,\frac{1}{9},\ldots.\right)$.

Jelas bahwa urutan pada kedua contoh yang bukan barisan bagian dari X berbeda dengan urutan barisan aslinya. Jadi keduanya bukan barisan bagian dari X.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang digunakan penulis adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

A. Menentukan Masalah.

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan.

B. Merumuskan Masalah.

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan, yaitu:

1. Apakah kaitan antara barisan konvergen dengan barisan terbatas?
2. Bagaimana menentukan kekonvergenan suatu barisan menggunakan teorema Bolzano-Weiestrass?

C. Studi Pustaka.

Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulakan data atau informasi yang berkaitan denagn permasalahan, mengumpulakan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan. Sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

D. Analisis dan Pemecahan Masalah

Analisis dan pemecahan masalah dilakuan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengetahui kaitan antara barisan konvegen dan barisan terbatas.
2. Mencari suatu barisan konvergen atau tidak menggunakan teorema Bolzano-Weiestrass.

E. Penarikan Simpulan

Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulakan data atau informasi yang berkaitan denagn permasalahan, mengumpulakan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan. Sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

BAB IV

PEMBAHASAN

A. MENENTUKAN HUBUNGAN ANTARA BARISAN KONVERGEN DAN BARISAN YANG TERBATAS.

Pada teorema tentang kaitan antara barisan konvergen dan barisan terbatas adalah bahwa setiap barisan yang konvergen adalah tebatas, dalam hal ini apakah dapat berlaku sebaliknya? Artinya bahwa setiap barisan yang terbatas pasti konvergen?

Untuk mengetahui hubungan antara barisan yang konvergen dan barisan terbatas kita lihat contoh-contoh berikut.

Contoh 3.1

Dipunyai $\left(x_n\right)_{n\in N}$ dengan $(x_n) = 3 + (-1)^n$, $\forall n \in N$.

Tunjukkan:

(a) $\left(x_n\right)_{n\in N}$ terbatas.

(b) barisan tersebut tidak konvergen.

Penyelesaian

(a) Jelas $\left|3 + (-1)^n\right| \le |3| + \left|(-1)^n\right|$

$= 3 + 1$

$= 4.$

Jelas $\left|3 + (-1)^n\right| \leq 4$, $\forall n \in N$.

Jelas terdapat M > 0 sehingga $\left|x_n\right| \leq M$ untuk setiap n$\in N$.

Jadi $\left(x_n\right)_{n\in N}$ terbatas.

(b) Andaikan $\left(3+\left(-1\right)^n\right)_{n\in N}$ untuk suatu bilangan real a.

Ambil $\varepsilon = 1$.

Pilih $K_1 \in N$ sehingga $\left|\left(3+\left(-1\right)^n\right)-a\right| < 1$ apabila $n \geq K_1$.

Kasus n gasal

Jelas $\left|2 - a\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 3$

Kasus n genap

Jelas $\left|4 - a\right| < 1 \Leftrightarrow 3 < a < 5$

Ini suatu kontradiksi.

Jadi $(x_n) = 3 + (-1)^n$ tidak konvergen.

Contoh 3.2

Dipunyai $\left(x_n\right)_{n\in N}$ dengan $(x_n) = \left(\left(-1\right)^n\right)$ $\forall n \in N$.

Tunjukkan:

(a) $\left(x_n\right)_{n\in N}$ terbatas.

(b) barisan tersebut tidak konvergen.

Penyelesaian

(a) Jelas $\left|\left(-1\right)^n\right| = 1 \leq 1 \forall n \in N$.

Jelas terdapat M > 0 sehingga $\left|x_n\right| \leq M$ untuk setiap n$\in N$.

Jadi $\left((-1)^n\right)_{n\in N}$ terbatas.

(b) Andaikan $\left((-1)^n\right)_{n\in N} \to a$ untuk suatu bilangan real *a*.

Ambil $\varepsilon = 1$.

Pilih $K_1 \in N$ sehingga $\left|((-1)^n - a\right| < 1$ apabila $n \geq K_1$.

Kasus *n* gasal

Jelas $\left|-1 - a\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < a < 0$

Kasus *n* genap

Jelas $\left|1 - a\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 2$

Ini suatu kontradiksi.

Jadi $\left((-1)^n\right)_{n\in N}$ tidak konvergen.

Contoh 2.3

Dipunyai $(x_n)_{n\in N}$ dengan $(x_n) = (n),\ \forall n \in N$.

Tunjukkan:

$(x_n)_{n\in N}$ tidak konvergen.

Penyelesaian

Ambil sembarang $M > 0$.

Jelas $\left|x_n\right| > M\ \forall n \in N$.

Jadi $\forall M > 0 \ni \left|x_n\right| > M \forall n \in N$.

Jadi $(x_n)_{n\in N}$ tidak terbatas.

Jelas $(x_n)_{n\in N}$ tidak konvergen.

Dari ke-3 contoh diatas terlihat bahwa tidak setiap barisan yang terbatas pasti konvergen..

Jadi teorema tentang kaitan antara barisan konvergen dan terbatas tidak berlaku bolak-balik, artinya bahwa setiap barisan yang konvergen pasti terbatas tetapi tidak berlaku sebaliknya, hanya barisan monoton terbatas adalah barisan konvergen.

B. MENENTUKAN SUATU BARISAN KONVERGEN ATAU TIDAK MENGGUNAKAN TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS.

Sebelum membahas tentang teorema Bolzano-Weierstrass dan penerapan ke contoh soal kita akan mempelajari beberapa teorema yang penting dalam pembuktian teorema Bolzano-Weierstrass.

Teorema 4.1

Setiap barisan bilangan real paling sedikit mempunyai satu barisan bagian yang monoton.

Bukti (1):

Ambil sembarang barisan bilangan real (x_n).

Untuk setiap $k \in N$ diambil

$$x_{n_k} = \text{maks } (x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$$

atau

$$y_{n_k} = \text{min } (x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$$

Diperoleh $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ barisan naik monoton dan $(y_{n_k}) \subset (x_n)$ barisan turun monoton.

Bukti (2):

Diambil sembarang barisan bilangan nyata (x_n). Terdapat tiga kemungkinan, paling sedikit salah satu terjadi:

i. Untuk setiap $k \in N$ terdapat $n_k \in N$ sehingga $k < n_k$ dan $x_k = x_{n_k}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\left(x_{n_k}\right) \subset \left(x_n\right)$ yang konstan. Jadi x_{n_k} barisan monoton.

ii. Untuk setiap $k \in N$ terdapat $n_k \in N$ sehingga $k < n_k$ dan $x_k < x_{n_k}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\left(x_{n_k}\right) \subset \left(x_n\right)$ yang naik monoton.

iii. Untuk setiap $k \in N$ terdapat $n_k \in N$ sehingga $k < n_k$ dan $x_k > x_{n_k}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\left(x_{n_k}\right) \subset \left(x_n\right)$ yang turun monoton.

Teorema 4.2

Jika X = $(x_n)_{n \in N} \to x$ maka setiap barisan bagian dari X konvergen ke *x*.

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) \in N$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$.

Ambil sembarang barisan bagian X'.

Tulis X' = $\left(x_{r_n}\right)_{r_n \in N}$.

Jelas $r_n \geq n$.

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in N \ni |x_n - x| < \varepsilon$ apabila $r_n \geq K(\varepsilon)$.

Jadi X' = $(x_{r_n})_{r_n \in N} \to x$

Teorema 4.3

Dipunyai barisan bilangan-bilangan real X = $(x_n)_{n \in N}$ terbatas dan $x \in R$.

Jika setiap barisan bagian X konvergen ke *x* maka barisan X konvergen *x*.

Bukti:

Dipunyai X = $(x_n)_{n \in N}$ terbatas.

Pilih M > 0 sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Andaikan $(x_n)_{n \in N}$ tak konvergen ke x.

Pilih $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan $X' = \left(x_{r_n}\right)_{r_n \in N}$ sehingga $\left|x_{r_n} - x\right| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $n \in N$.

Jelas X' terbatas

Pilih barisan X'' barisan bagian dari X'.

Jelas X'' juga barisan bagian dari X.

Jadi $X'' \to x$.

Jadi barisan ekor terletak di $V_{\varepsilon_0}(x)$.

Ini suatu kontradiksi.

Jadi $(x_n)_{n \in N}$ konvergen ke *x*.

Teorema 4.4 *(Bolzano-Weierstrass)*

Setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen.

Bukti (1):

Dipunyai X = $(x_n)_{n \in N}$ terbatas.

Ambil sembarang X' = $(x_n)_{n \in N}$ barisan bagian dari X yang monoton.

Jelas X’ terbatas.

Jadi X’ konvergen.

Bukti (2):

Dipunyai X = $(x_n)_{n \in N}$ terbatas.

Jadi $\{x_n \mid n \in N\}$ terbatas.

Pilih $I_1 = [a,b]$ sehingga $a \le x_n \le b \forall x \in N$.

Pilih $n_1 = 1$.

Bagi I_1 menjadi sub selang I_1’ dan I_1’’, dan bagi himpunan $\{n \in N \mid n > 1\}$ menjadi dua bagian, yaitu:

$A_1 = \{n \in N \mid n > n_1, x_n \in I_1'\}$ dan

$B_1 = \{n \in N \mid n > n_1, x_n \in I_1''\}$.

Kasus A_1 tak hingga.

Pilih $I_2 = I_1$ dan $n_2 = \inf \{A_1\}$

Bagi I_2 menjadi subselang I_2’ dan I_2’’, dan bagi himpunan

Bangun $\{n \in N \mid n > n_2\}$ menjadi dua bagian, yaitu:

$A_2 = \{n \in N \mid n > n_2, x_n \in I_1'\}$

$B_2 = \{n \in N \mid n > n_2, x_n \in I_1''\}$.

Kasus A_2 tak hingga

Pilih $I_3 = I_2'$ dan $n_3 = \inf \{A_2\}$.

Proses ini dilanjutkan, diperoleh selang bersarang:

$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset ... \subset I_k \subset ...$ dan barisan $\left(x_{n_k}\right)_{n_k \in N}$ sehingga $x_{n_k} \in I_k$ untuk setiap $k \in N$.

Jelas $\left| I_k \right| = \dfrac{b - a}{2^{k-1}}$.

Pilih $\xi \in I_k \; \forall \; k \in N$.

Jelas $\left| x_{n_0} - \xi \right| < (b - a)(2^k)$.

Jelas $(b - a) > 0$ dan $\left(\dfrac{1}{2^{k-1}}\right)_{k \in N} \rightarrow 0$.

Jadi $\left(x_{n_k}\right)_{n_k \in N} \rightarrow \xi$.

Teorema Bolzano-Weierstrass mengatakan bahwa setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen, barisan bagiannya konvergen tak perlu ke titik yang sama. Tetapi jika setiap barisan bagiannya yang konvergen itu konvergen ke titik yang sama, maka barisan aslinya akan konvergen ke titik itu pula. Lebih jauhnya tentang teorema Bolzano-Weierstrass kita akan melihat contoh-contohnya.

Contoh 1

Dipunyai $(x_n)_{n \in N}$ dengan $(x_n) = (\cos \; n\pi)$, $\forall n \in N$.

Periksa apakah barisan tersebut konvergen.

Penyelesaian

Jelas anggota barisan tersebut adalah (-1,1,-1,1,-1,.....).

Jelas $\left|\cos n\pi\right| = 1$.

Jelas $\left|\cos \; n\pi\right| = 1 \leq 1 \; \forall n \in N$.

Jadi $(x_n)_{n\in N}$ terbatas.

Pilih $(x_n)_{n\in N}$ ' = $(\cos 2n\pi)_{n\in N}$.

Jelas anggota barisan $(x_n)_{n\in N}$ ' adalah (1,1,1,...,1,...)

Jelas $(x_n)_{n\in N}$ ' = $(\cos 2n\pi)_{n\in N} \to 1$.

Pilih $(x_n)_{n\in N}$ ''= $(\cos(2n+1)\pi)_{n\in N}$.

Jelas anggota barisan $(x_n)_{n\in N}$ '' adalah (-1,-1,-1,...,-1,...)

Jelas $(x_n)_{n\in N}$ X''= $(\cos(2n+1)\pi)_{n\in N} \to -1$.

Jelas X = $(\cos\ n\pi)_{n\in N}$ mempunyai barisan bagian yang konvergen.

Jelas barisan bagiannya konvergen ke titik yang berbeda.

Jadi $(x_n)_{n\in N}$ tidak konvergen.

Contoh 2

Dipunyai $(x_n)_{n\in N}$ dengan $(x_n) = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)$, $\forall n \in N$ apabila b >1.

Tunjukkan:

(a) Apakah barisan tersebut konvergen.

(b) Titik konvergensinya.

Penyelesaian

(a) Pilih b = 2 > 1.

Jelas $\left|2^{\frac{1}{n}}\right| \leq 2 \ \forall n \in N$.

Jadi $(x_n)_{n\in N}$ terbatas.

Tulis $b^{\frac{1}{n}} = z_n$.

Jelas $z_{n+1} < z_n$.

Jelas $(x_n)_{n\in N}$ monoton turun.

Jadi $(x_n)_{n\in N}$ konvergen.

(b) Tulis $z_n \to z$.

Jelas $(z_{2n})_{n\in N} = \left(\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \to z^{\frac{1}{2}}$.

Jadi $z^{\frac{1}{2}} = z \Leftrightarrow z^{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0$.

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = 1$$

jadi z = 1.

Jadi $\left(b^{\frac{1}{n}}\right) \to 1$.

Contoh 3

Dipunyai barisan $(\alpha^n)_{n\in N}$ dengan $0 < \alpha < 1$.

Periksa apakah barisan tersebut konvergen atau tidak.

Penyelesaian

Ambil sembarang $n \in N$.

Jelas $x_{n+1} = \alpha^{n+1} < \alpha^n = x_n$ dan $0 < x_n < 1$.

Jadi $(\alpha^n)_{n\in N}$ monoton turun dan terbatas.

Jadi $(\alpha^n)_{n\in N}$ konvergen.

Tulis $\left(\alpha^{n}\right)_{n\in N} \to x$.

Pilih X' = $\left(x_{2n}\right)_{n\in N}$.

Jelas X' = $\left(x_{2n}\right)_{n\in N}$ = $\left(x_{n}^{2}\right)_{n\in N} \to x^{2}$.

Jadi x = x^2 $\Leftrightarrow$ $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Jadi x = 0.

Jadi $\left(\alpha^{n}\right)_{n\in N} \to 0$.

BAB V

PENUTUP

A. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari kedua teorema diatas dapat diambil kesimpulan bahwa setiap barisan yang konvergen pasti dia terbatas, sebaliknya bahwa barisan yang terbatas belum tentu konvergen. Jika barisan monoton terbatas maka barisan tersebut konvergen.
2. Teorema Bolzano-Weierstrass

   ”Setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen”.

   Teorema ini dibuktikan dengan 2 cara, cara ke-1 yakni dibuktikan dengan mengambil barisan bagian yang monoton dan cara ke-2 dengan interval bersarang. Teorema Bolzano-Weierstrass dapat diartikan bahwa setiap barisan yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen tak perlu ke titik yang sama, tetapi jika setiap barisan bagiannya konvergen ke titik yang sama maka barisan aslinya konvergen pula ke titik tersebut.

B. SARAN

Dalam skripsi ini, pengujian kekonvergenan dilakukan dengan teorema Bolzano-Weierstrass. Bagi pembaca yang berminat dapat mengembangkan dalam menguji kekonvergenan suatu barisan dengan cara lain. Pembaca juga dapat mengembangkan konsep kekonvergenan bukan hanya pada barisan bernilai real saja.

DAFTAR PUSTAKA

Baisuni, H.H.M. 1986. *Kalkulus*. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.

Bartle, R.G. and Sherbert, D.R. 1994. *Introduction to Real Analysis, second edition*. Singapore: John wiley & Sons Inc.

Darmawijaya, S. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Yogyakarta : Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.

Goldberg and Richard, R.1976. *Methods of Real Analysis, second edition.* USA: John wiley & Sons Inc.

Leithold, L. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Parzynsky, W.R. and Zipse, P.W. 1987. *Introduction to Mathematical Analysis*.Mc Graw-Hill International Editions Mathematics Series.