SIFAT KOMPAK PADA RUANG HAUSDORFF

(RUANG TOPOLOGI TERPISAH)

skripsi

disajikan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sain

Program Studi Matematika

oleh

Ririn Setyaningrum

4150406026

PERPUSTAKAAN
UNNES

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2011

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Sifat Kompak Pada Ruang Hausdorff (Ruang Topologi Terpisah)

disusun oleh

Nama : Ririn Setyaningrum

NIM : 4150406026

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi FMIPA Unnes pada tanggal 18 Februari 2011

Panitia:

Ketua	Sekretaris
Dr. Kasmadi Imam S., M.S.	Drs. Edy Soedjoko, M.Pd
195111151979031001	195604191987031001

Penguji I

Drs. Wuryanto, M.Si

195302051983031003

Penguji II/	Penguji III/
Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Drs. M. Chotim, MS	Dr. Masrukan, M.Si
194905151979031001	196604191991021001

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa yang tertulis dalam skripsi ini benar-benar hasil karya sendiri, bukan jiplakan dari karya orang lain baik sebagian ataupun seluruhnya. Kecuali yang disebutkan sumbernya. Pendapat atau temuan orang lain yang terdapat dalam skripsi ini dikutip/dirujuk berdasarkan kode etik ilmiah.

Semarang, Februari 2011

Ririn Setyaningrum
4150406026

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

"Ya Tuhanku, berilah aku ilham. Untuk tetap mensyukuri nikmat-Mu yang telah Engkau anugerahkan kepadaku dan kepada ibu bapakku dan untuk mengerjakan amal shaleh yang Engkau ridhai, dan masukkanlah aku dengan Rahmat-Mu ke dalam golongan hamba-hamba-Mu yang shaleh".

(Q.S. An-Naml : 19).

"Dilaksanakan dengan baik lebih baik daripada dikatakan dengan baik"

(Ririn Setyaningrum).

PERSEMBAHAN

Dari lubuk hati yang terdalam, kupersembahkan karya perjuanganku ini, ke pangkuan:

- Allah S.W.T : Puji syukurku atas kehadirat-Mu Raja Semesta
- My Parent :
  Yang selalu berdo'a untukku dalam setiap tarikan napasnya, pengorbanan yang tiada pamrih dalam setiap lantunan do'amu yang mengringi setiap langkahku.
- My Sister : Thanks for all for your motivation to me.
- My Love: Thanks a lot.
- Sahabatku: Thanks for all.
- Teman-teman satu angkatan, Matematika Reguler

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN UNNES

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Allah SWT atas Ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul “Sifat Kompak Pada Ruang Hausdorff (Ruang Topologi Terpisah)” .

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Prof. Dr. H. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dekan FMIPA, Bapak Dr. Kasmadi Imam S, M.Si beserta keluarga besar dosen FMIPA universitas Negeri Semarang atas ilmu yang telah diberikan.
3. Bapak Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Bapak Drs. Moch Chotim, M.S, Pembimbing I yang telah banyak membantu, membimbing dan memberikan saran dalam proses penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Masrukan, M.Si, Pembimbing II yang telah banyak membantu, membimbing dan memberikan saran dalam proses penyusunan skripsi ini.
6. Kedua Orang tua ku yang senantiasa selalu mendoakan serta memberikan dorongan sehingga skripsi ini selesai.
7. Adik-adikku yang memotivasi agar bisa menyelasikan skripsi ini dengan lancar.
8. Sahabat-sahabat dan semua pihak yang tak dapat saya sebutkan satu persatu terima kasih atas dukungannya.

Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Semarang, Februari 2011

Penulis

ABSTRAK

Setyaningrum, Ririn. 2011. *Sifat Kompak Pada Ruang Hausdorff (Ruang Topologi Terpisah).* Skripsi, Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang. Drs. M. Chotim, MS, Dr. Masrukan, M.Si.

Kata Kunci: Ruang Topologi;Kompak; Ruang Hausdorff.

Ruang topologi *X* disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah jika setiap pasangan titik yang berbeda a dan b di *X* masing-masing termasuk kedalam himpunan-himpunan terbuka yang *disjoint*.

Tujuan dari penelitian adalah (1) Mengetahui apakah setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup. (2) Mengetahui sifat kompak dan aplikasi pada ruang Hausdorff dari definisi dan teorema yang terkait.

Metode penulisan skripsi ini yaitu kajian pustaka dengan langkah-langkah (a) Menentukan Masalah, (b) Perumusan Masalah, (c) Studi Pustaka, (d) Analisis dan Pemecahan Masalah, (e) Penarikan Kesimpulan.

Diperoleh hasil (1) Setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup. (2) Sifat Kompak: Misal X ruang Hausdorff kompak lokal yang tidak kompak, dan Y adalah sebuah titik pengkompak X. Maka Y adalah ruang Hausdorff kompak ; X adalah subruang Y ; Himpunan $Y - X$ terdiri atas sebuah titik dan $\bar{X} = Y$, Dalam aplikasi $([a,b],\mathcal{T})$ dengan $\mathcal{T} = \mathcal{P}([a,b])$ merupakan suatu himpunan kompak dalam ruang Hausdorff.

Disarankan (1) Perlu diadakan pengkajian lebih lanjut apakah ada teorema lain yang dapat digunakan untuk menentukan apakah Setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup. (2) Perlu diadakan pengkajian lebih lanjut apakah ada soal lain yang dapat memenuhi teorema dan definisi dari sifat kompak pada ruang Hausdorff yang tidak di bahas oleh penulis.

PERPUSTAKAAN
UNNES

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
1.5 Manfaat	2
1.6 Sistematika Penulisan Skripsi	3
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1 Ruang Topologi	5
2.2 Keterhubungan dan Kekompakan	18
2.3 Ruang Hausdorff (Ruang Topologi Terpisah)	19
BAB III METODE PENELITIAN	22
3.1 Menentukan Masalah	22
3.2 Perumusan Masalah	22
3.3 Studi Pustaka	22
3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah	23
3.5 Penarikan Kesimpulan	23

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 24
4.1 Ruang Hausdorff 24
4.2 Sifat Kompak Ruang Hausdorff 25

BAB V PENUTUP 36
5.1 Simpulan 36
5.2 Saran 37

DAFTAR PUSTAKA 38

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

DAFTAR SIMBOL

(a, b)	Interval terbuka dari a sampai b
$[a, b]$	Interval tertutup dari a sampai b
$(X, \mathcal{T})$	Ruang Topologi
(X, τ)	Ruang Topologi
$\mathcal{T}$	Suatu Topologi
$(A_i)_{i \in I}$	Suatu puak unsur- unsur dari $\mathcal{T}$
$N(x)$	Lingkungan (neighborhoud)
U	Himpunan buka
A°	Titik dalam (titik interior)
$\bar{A}$	Tutupan A (setiaan A)
G_x	Himpunan terbuka pada $(X, \mathcal{T})$
A^d	Himpunan dari semua titik limit A
$\mathbb{R}$	Himpunan Bilangan Real
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kata topologi berasal dari bahasa yunani yaitu topos yang artinya "tempat"dan logos yang artinya "ilmu" merupakan cabang matematika yang bersangkutan dengan tata ruang. Kata topologi digunakan baik untuk cabang matematika dan untuk keluarga himpunan dengan beberapa sifat yang digunakan untuk menentukan ruang topologi yang merupakan objek dasar dari topologi.

Inspirasi munculnya definisi "kompak" berawal dari sistem bilangan real. Himpunan tertutup dan terbatas dari garis real menjadi acuan model yang baik untuk mengembangkan sifat kompak pada ruang topologi. Karena sifat terbatas adalah konsep yang sangat sulit dipahami di dalam ruang topologi umum, maka dikajilah sifat kompak untuk melihat banyak sifat dari himpunan tanpa memperhatikan sifat terbatas. (Luh Putu Ida Harini)

Beberapa sifat dari ruang topologi X bergantung kepada distribusi dari himpunan-himpunan terbuka dalam ruang topologi tersebut. Ruang topologi X disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah jika setiap pasangan titik yang berbeda a dan b di X masing-masing termasuk kedalam himpunan-himpunan terbuka yang *disjoint*.

Dalam penelitian ini akan diberikan sifat yang harus dipenuhi pada suatu himpunan pada ruang Hausdorff agar himpunan tersebut dikatakan kompak.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas maka muncul permasalahan, yaitu:

1. Apakah setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup?
2. Bagaimana sifat kompak dan aplikasi dari ruang Hausdorff?

1.3 Pembatasan Masalah

Dari permasalahan yang dihadapi tersebut akan dikaji bagaimana sifat himpunan kompak dan aplikasi pada ruang Hausdorff yang meliputi definisi, teorema, serta bukti yang terkait dengan materi tersebut.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini antara lain:

1. Mengetahui apakah setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup.
2. Mengetahui sifat kompak dan aplikasinya pada ruang Hausdorff dari definisi dan teorema yang terkait.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Bagi peneliti

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Peneliti dapat mengetahui sifat kompak dan aplikasinya pada ruang Hausdorff.

2. Bagi pihak lain

Dengan penelitian ini diharapkan dapat menjelaskan sifat kompak yang lain pada ruang Hausdorff yang tidak dibahas penulis.

1.6 Sistematika Penulisan Skripsi

Penyusunan sistematika penulisan skripsi terdiri dari tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi dan bagian akhir skripsi. Rincian tiap-tiap bagian sebagai berikut.

1) Bagian awal

Bagian awal skripsi berisi halaman judul, lembar pengesahan, pernyataan, motto dan persembahan, abstrak, kata pengantar, daftar isi, dan daftar simbol.

2) Bagian isi

Bagian isi terdiri dari lima bab, yaitu Bab I Pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan skripsi. Bab II Landasan Teori berisi definisi, teorema, serta contoh soal. Bab III Metode Penelitian berisi menentukan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah, dan penarikan simpulan. Bab IV Hasil Penelitian dan Pembahasan berisi hasil-

hasil penelitian dan pembahasan. Bab V Penutup berisi simpulan dan saran.

3) Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam matematika, konsep himpunan termasuk konsep yang tidak didefinisikan (konsep dasar). Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan baik. Himpunan ditulis dengan huruf besar: A, B, C, ...Objek-objek yang termasuk dalam suatu himpunan dinamakan anggota atau elemen, yang ditulis dengan huruf kecil: a, b, x, y, ... Menjadi anggota suatu himpunan diberi notasi $\in$ dan bukan menjadi anggota suatu himpunan diberi notasi $\notin$. Elemen yang satu dengan yang lainnya dari suatu himpunan dipisahkan dengan tanda koma dan dikurung dalam tanda{ }.(Kartono, 1995:1)

2.1 Ruang Topologi

Definisi 2.1.1 (Chotim, 1992:1)

Dipunyai X suatu himpunan dan $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ disebut suatu topologi pada X jika:

(c_1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $X \in \mathcal{T}$,

(c_2) jika A dan B di $\mathcal{T}$, maka $A \cap B \in \mathcal{T}$,

(c_3) jika $(A_i)_{i \in I}$ suatu puak unsur- unsur dari $\mathcal{T}$, maka $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Contoh 2.1.1

Misalkan a, b, dan c adalah tiga benda yang berbeda, dan misalkan

$X = \{a, b, c\}$ dan $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, b\}\}$.

Tunjukkan $\mathcal{T}$ suatu topologi di X .

Bukti:

(c_1) Jelas $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

Jadi (c_1) dipenuhi.

(c_2) Ambil sembarang $A, B \in \mathcal{T}$.

Kasus $b \in A \wedge b \in B$:

Jelas $b \in A \cap B$.

Jadi $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Kasus $b \notin A \vee b \notin B$:

Kasus $b \notin A$:

Jelas $A = \emptyset$.

Jadi $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Kasus $b \notin B$:

Jelas $B = \emptyset$.

Jadi $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Kasus $b \notin A \wedge b \notin B$:

Jelas $A = \emptyset, B = \emptyset$.

Jadi $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Jadi $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \cap B \in \mathcal{T}$.

Jadi (c_2) dipenuhi.

(c_3) Ambil sembarang puak $(A_i)_{i \in I}$ di $\mathcal{T}$.

Kasus $A_i = \emptyset \ \forall i \in I$.

Jelas $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Kasus $A_{i_0} \neq \emptyset$ untuk suatu $i_0 \in I$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Jelas $\bigcup_{t\in I} A_t = A_{t_n} \cup (\bigcup_{t\in I, t\in t_n} A_t)$.

Jadi $b \in \bigcup_{t\in I} A_t$.

Jadi $\bigcup_{t\in I} A_t \in \mathcal{T}$.

Jadi (c_3) dipenuhi.

Jadi $\mathcal{T}$ merupakan topologi di X.

Teorema 2.1.1(Chotim, 1992:4)

Dipunyai X suatu himpunan dan $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathfrak{B}'$ adalah himpunan semua himpunan bagian X yang merupakan irisan puak- puak hingga unsur-unsur di $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}''$ adalah himpunan semua himpunan bagian X yang merupakan gabungan puak-puak unsur-unsur di $\mathfrak{B}'$. Maka $\mathfrak{B}''$ merupakan suatu topologi pada X.

Bukti:

Dipunyai $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(x)$.

$$\mathfrak{B}' = \left\{ A \subset X \middle| A \bigcap_{t\in I} A_t, I \text{ hingga}, A_t \in \mathfrak{B} \right\}$$

$$\mathfrak{B}'' = \left\{ B \subset X \middle| B = \bigcup_{t\in I} A_t, A_t \in \mathfrak{B}' \right\}$$

(c_1) Bangun Puak $\langle A_t \rangle_{t\in\emptyset}$ di $\mathfrak{B}$.

Tunjukkan $\bigcap_{t\in\emptyset} A_t \subset X$.

Bukti:

Jelas $\bigcap_{t\in\emptyset} A_t \subset X$.

Ambil sembarang $a \in X$.

Andaikan $a \notin \bigcap_{t\in\emptyset} A_t$.

Jelas $a \notin A_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in \emptyset$.

Ini suatu kontradiksi.

Jadi $a \in \bigcap_{i \in \emptyset} A_i$.

Jadi $X \subset \bigcap_{i \in \emptyset} A_i$.

Jadi $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$.

Jadi $X \in \mathfrak{B}'$.

Jadi (c_1) dipenuhi.

(c_2) Ambil sembarang $A, B \in \mathfrak{B}''$.

Tulis $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ dan $\bigcup_{i \in I} B_i$, $A_i \in \mathfrak{B}'$ dan $B_i \in \mathfrak{B}'$.

Jelas $A \cap B = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$

$= \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i)$

$= \bigcup_{i \in I} \left(\left(\bigcap_{j \in J} A_{i_j} \right) \cap \left(\bigcap_{k \in K} B_{i_k} \right) \right)$, J, K hingga dan A_{i_j}, $B_{i_k} \in \mathfrak{B}$

$= \bigcup_{i \in I} (C_j \cap D_k)$, $C_j, D_k \in \mathfrak{B}'$

$= \bigcup_{i \in I} E_e$, $E_e \in \mathfrak{B}'$.

Jadi $\forall A, B \in \mathfrak{B}''$, $A \cap B \in \mathfrak{B}''$.

Jadi (c_2) dipenuhi.

(c_3) Ambil sembarang puak $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ di $\mathfrak{B}''$.

Jelas $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} A_{i_j} \right)$, $A_{i_j} \in \mathfrak{B}'$

$= \bigcup_{k \in K} C_k$, $C_k \in \mathfrak{B}'$

Jadi $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{B}''$.

Jadi (c_3) dipenuhi.

Jadi $\mathfrak{B}''$ suatu topologi pada X.

Definisi 2.1.2(Chotim, 1992:7)

Pasangan $(X,\mathcal{T})$, dengan X suatu himpunan dan $\mathcal{T}$ suatu topologi pada X disebut ruang topologi.

Definisi 2.1.3(Kartono,1995:43)

Dipunyai $A \subset X$ pada ruang topologi X dikatakan tertutup jika himpunan $X - A$ terbuka.

Contoh 2.1.2

Dipunyai $(X,\mathcal{T})$ suatu ruang topologi.

Buktikan $x, \emptyset$ merupakan himpunan tertutup.

Bukti:

Jelas $x, \emptyset \in \mathcal{T}$.

Jadi $x, \emptyset$ terbuka.

Jelas $x^c = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Jadi x^c terbuka.

Jadi x tertutup.

Jelas $\emptyset^c = x \in \mathcal{T}$.

Jadi $\emptyset^c$ terbuka.

Jadi $\emptyset$ tertutup.

Definisi 2.1.4(Kartono,1995:43)

Diberikan (X,τ) adalah ruang topologi pada X. Suatu himpunan $V \subset X$ adalah persekitaran (Neighbourhoods) dari x (dalam ruang topologi

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

(X,τ) jika terdapat suatu himpunan $U \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U \subset V$.

Teorema 2.1.2(Kartono,1995:45)

Diberikan (X,τ) adalah ruang topologi pada X dan $x \in X$ maka berlaku:

1. Jika $V \in N(x)$ maka $x \in V$.
2. Jika $V_1 \in N(x)$ dan $V_1 \subset V_2$ maka $V_2 \in N(x)$.
3. Jika V_1 dan V_2 dalam $N(x)$ maka $V_1 \cap V_2 \in N(x)$.
4. Jika $V \in N(x)$ maka terdapat $W \in N(x)$ sedemikian sehingga $y \in W \Rightarrow V \in N(y)$.

Bukti:

1. Ambil sembarang $V \in N(x)$.

   Jelas $V \subset X$.

   Di pilih $U \in \tau$, Sehingga $x \in U \subset V$.

   Jadi $V \in N(x)$ maka $x \in V$.
2. Dipunyai $V_1 \in N(x)$.

   Di pilih $U \in \tau$.

   Sehingga $x \in U \subset V_1$.

   Dipunyai $V_1 \subset V_2$.

   Jelas $x \in V_1 \subset V_2$.

   Jelas terdapat $U \in \tau$.

   Sehingga $x \in U \subset V_2$.

   Jadi $V_2 \in N(x)$.
3. Dipunyai V_1 dan $V_2 \in N(x)$.

Karena $V_1 \in N(x)$ maka terdapat $U_1 \in \tau$, sehingga $x \in U_1 \subset V_1$ ...(i)

Karena $V_2 \in N(x)$ maka terdapat $U_2 \in \tau$, sehingga $x \in U_2 \subset V_2$ ...(ii)

Dari (i) dan (ii) maka $x \in (U_1 \cap U_2) \subset (V_1 \cap V_2)$.

Karena $U_1 \in \tau$ dan $U_2 \in \tau$ maka $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Jadi $V_1 \cap V_2 \in N(x)$.

4. Ambil sembarang $V \in N(x)$.

   Di pilih $U_0 \in \tau$, sehingga $x \in U_0 \subset V$.

   Tulis $U_0 = W$.

   Jelas $W \in \tau$.

   Di pilih $W = U$.

   Jelas $x \in U \subset W$.

   Jadi terdapat $U \in \tau$, sehingga $x \in U \subset W$.

   Jadi $W \in N(x)$.

   Ambil sembarang $y \in W$.

   Jelas terdapat $U \in \tau$, sehingga $y \in W \subset V$.

   Jadi $V \in N(y)$.

   Jadi terdapat $W \in N(x)$, sehingga $(y \in W \Longrightarrow V \in N(y))$.

Definisi 2.1.4(Chotim,1992:23)

Misalkan $A \subset X$. $x \in X$disebut titik dalam A jika A merupakan suatu lingkungan untuk x.

Bukti:

Dipunyai x titik dalam A.

Jelas $A \in N(x)$.

Di pilih $U \in \mathcal{T}$, sehingga $x \in U \subset A$.

Tulis $U = V_x$.

Jadi terdapat $V_x \in N(x)$, sehingga $x \in V_x \subset A$.

Jadi $x \in X$ merupakan titik dalam A.

Teorema 2.1.3(Chotim,1992:23)

Untuk setiap $A \subset X$, himpunan A° terbuka.

Bukti:

Ambil sembarang $A \subset X$.

Ambil sembarang $c \in A^\circ$.

Jelas $A \in N(c)$.

Di pilih $U_c \in \mathcal{T}$ Sehingga $c \in U_c \subset A$.

Bangun $\bigcup_{c \in A^\circ} U_c$ terbuka.

Ambil sembarang $a \in \bigcup_{c \in A^\circ} U_c$.

Jelas $a \in U_c \subset A$ untuk suatu $c_0 \in A^\circ$.

Jadi $A \in N(a) \Leftrightarrow a \in A^\circ$.

Jadi $\forall\, a \in \bigcup_{c \in A^\circ} U_c$, $a \in A^\circ$.

Jadi $\bigcup_{c \in A^\circ} U_c \subset A^\circ$.

Ambil sembarang $b \in A^\circ$.

Jelas $A \in N(b)$.

Pilih $U_b \in \mathcal{T}$ Sehingga $b \in U_b \subset A$.

Jelas $b \in \bigcup_{b \in A^\circ} U_b$.

Jadi $\forall\, b \in A^\circ, b \in \bigcup_{b \in A^\circ} U_b$.

Jadi $A^\circ \subset \bigcup_{b \in A^\circ} U_b$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Jadi $\bigcup_{c \in A^\circ} U_c = A^\circ$.

Jadi A° terbuka.

Akibat Teorema 2.1.3(Chotim,1992:24)

Suatu himpunan $A \subset X$ terbuka jika dan hanya jika $A = A^\circ$.

Bukti:

$(\Leftarrow)$ Dipunyai $A = A^\circ$.

Jelas A° terbuka.

Jadi A terbuka.

$(\Rightarrow)$ Dipunyai A terbuka.

Ambil sembarang $y \in A$.

Jelas $A \in \mathcal{N}(y)$.

Jelas $y \in A^\circ$.

Jadi $\forall\, y \in A, y \in A^\circ$.

Jadi $A \subset A^\circ$.

Ambil sembarang $b \in A^\circ$.

Jelas $b \in \mathcal{N}(b)$.

Di pilih $U \in \mathcal{T}$ sehingga $b \in U \subset A$.

Jadi $b \in A$.

Jadi $\forall\, b \in A^\circ, b \in A$.

Jadi $A^\circ \subset A$.

Jadi $A = A^\circ$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Contoh 2.1.3

Dipunyai $(X,\mathcal{T})$ suatu ruang topologi, $A \subset X$, dan $\mathcal{A} = \{B \subset A | B \in \mathcal{T}\}$.

Buktikan $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} A^{\circ}$.

Bukti:

Ambil sembarang $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Jelas $x \in B_0$ untuk suatu $B_0 \in \mathcal{A}$.

Jelas $B_0 \subset A$ dan $B_0 \in \mathcal{T}$.

Jelas $B_0 \in \mathcal{N}(x)$ dan $A \in \mathcal{N}(x)$.

Jadi $x \in A^{\circ}$.

Jadi $\forall x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$, $x \in A^{\circ}$

$\Leftrightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \subset A$.

Ambil sembarang $x \in A^{\circ}$.

Jelas $A \in \mathcal{N}(x)$.

Di pilih $B_1 \in \mathcal{T}$, sehingga $x \in B_1 \subset A$.

Jelas $B_1 \in \mathcal{A}$, maka $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Jadi $\forall x \in A^{\circ}$, $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$

$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Jadi $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = A^{\circ}$.

Definisi 2.1.5(Chotim,1992:24)

Dipunyai $A \subset X$. $x \in X$ dikatakan titik batas untuk *A* jika setiap lingkungan x mempunyai irisan tak kosong dengan *A*.

Himpunan semua setiaan untuk *A* disebut setiaan *A* (atau tutupan *A*) dan dinyatakan dengan $\bar{A}$. Jelas $\bar{X} = X$ dan $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Jelas juga $A \subset \bar{A}$ untuk setiap himpunan $A \subset X$.

Bukti:

Ambil sembarang $A \subset X$.

Ambil sembarang $x \in A$.

Ambil sembarang $V \in \mathcal{N}(x)$.

Di pilih $U \in \mathcal{T}$ sehingga $x \in U \subset V$.

Jadi $x \in V \cap A$.

Jadi $V \cap A \neq \emptyset$.

Jadi $\forall V \in \mathcal{N}(x) V \cap A \neq \emptyset$.

Jadi $x \in \bar{A}$.

Jadi $\forall x \in A, x \in \bar{A}$.

Jadi $A \subset \bar{A}$.

Definisi 2.1.6(Kartono,1995:56)

Pandang G_x adalah himpunan terbuka pada ruang topologi $(X,\mathcal{T})$ yang memuat x dan A adalah sebarang himpunan bagian dari X. Titik x dinamakan titik limit (atau titik akumulasi) dari himpunan $A \subset X$ jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka G_x memuat suatu titik dari A yang berlainan dengan x.

Yang berarti bahwa : jika G_x terbuka, $x \in G_x$ maka

$$G_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset.$$

Dengan simbol:

x titik limit dari A bhb $\forall(G_x)$, $G_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.

Himpunan dari semua titik limit A dinamakan derived set, yang diberi notasi A^d .

Contoh 2.1.4

Diberikan $\tau = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$, suatu topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$.

Misalnya diambil $A = \{a,b,c\}$.

Tentukan A^d.

Bukti:

i. Untuk titik a

$G_a = X, \{a\}, \{a,c,d\}$.

Maka $X \cap \{a,b,c\} - \{a\} = \{b,c\} \neq \emptyset$

$\{a\} \cap \{a,b,c\} - \{a\} = \emptyset$.

Karena terdapat G_a sehingga $G_a \cap A - \{a\} = \emptyset$ maka a bukan titik limit dari A.

ii. Untuk titik b

$G_b = X, \{b,c,d,e\}$.

Maka $X \cap \{a,b,c\} - \{b\} = \{a,c\} \neq \emptyset$

$\{b,c,d,e\} \cap \{a,b,c\} - \{b\} = \{c\} \neq \emptyset$.

Karena $\forall(G_b)$, $G_b \cap A - \{b\} \neq \emptyset$ maka b merupakan titik limit dari A.

iii. Untuk titik c

$G_c = X, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}$.

Maka $X \cap \{a,b,c\} - \{c\} = \{a,b\} \neq \emptyset$

$\{c,d\} \cap \{a,b,c\} - \{c\} = \emptyset$.

Karena terdapat (G_c) sehingga $G_c \cap A - \{c\} = \emptyset$ maka c bukan merupakan titik limit dari A.

iv. Untuk titik d

$G_d = X, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}$.

Maka $X \cap \{a,b,c\} - \{d\} = \{a,b,c\} \neq \emptyset$

$\{c,d\} \cap \{a,b,c\} - \{d\} = \{c\} \neq \emptyset$

$\{a,c,d\} \cap \{a,b,c\} - \{d\} = \{a,c\} \neq \emptyset$

$\{b,c,d,e\} \cap \{a,b,c\} - \{d\} = \{b,c\} \neq \emptyset$

Karena $\forall(G_d)$, $G_d \cap A - \{d\} \neq \emptyset$ maka d merupakan titik limit dari A.

Jadi $A^d = \{b,d,e\}$.

Definisi 2.1.7(Kartono,1995:66)

Exterior suatu himpunan *A* dalam ruang topologi $(X,\mathcal{T})$, yang diberi notasi "ext (A)" adalah interior dari komplemen himpunan *A*.

Jadi ext (A) = int (A^c).

Selanjutnya pandang G_x adalah himpunan terbuka pada ruang topologi $(X,\mathcal{T})$ yang memuat x dan $A \subset X$. x adalah titik exterior dari A bhb $\exists\, G_x$ sedemikian sehingga $G_x \subset A^c$.

Contoh 2.1.5

Diberikan $\tau = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$, suatu topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$.

Tentukan ext (B).

Bukti:

i. Ambil sembarang $A = \{b, c, d\}$ sehingga $A^c = \{a, e\}$.

int (A^c) = int $(\{a, e\})$

$= \{a\}$.

Jadi ext (A) = $\{a\}$.

ii. Ambil sembarang B = $\{a\}$ sehingga $B^c = \{b, c, d, e\}$.

int (B^c) = int $(\{b, c, d, e\})$

$= \{c, d\} \cup \{b, c, d, e\}$

$= \{b, c, d, e\}$.

Jadi ext (B) = $\{b, c, d, e\}$.

2.2 Keterhubungan dan Kekompakan

Definisi 2.2.1(Wahyudin, 1987:148)

Dua subset A dan B dari ruang topologi X disebut terpisah, bila:

(i) A dan B saling lepas (disjoint), dan

(ii)Titik kumpul dari A tidak termasuk anggota set B, dan sebaliknya.

Dengan kata lain, A dan B terpisah bila dan hanya bila $A \cap \bar{B} = \emptyset$ dan $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

Contoh 2.2.1

Perhatikan interval-interval pada garis real R berikut:

$A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, dan C= $[2,3)$

A dan B adalah terpisah, karena $\bar{A} = [0, 1]$ dan $\bar{B} = [1, 2]$, dan $A \cap \bar{B} = \emptyset$ dan $\bar{A} \cap B = \emptyset$. Tetapi B dan C tidak terpisah karena $2 \in C$ adalah titik kumpul dari B, jadi: $\bar{B} \cap C = [1,2] \cap [2,3) = \{2\} \neq \emptyset$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Definisi 2.4.2(Wahyudin, 1987:134)

Subset A dari ruang topologi X disebut kompak, bila setiap sampul (cover) buka dari A tereduksi ke sampul terhingga. Dengan kata lain, bila A kompak dan $A \subset \cup\, iGi$ dengan Gi set- set buka, misalkan $Gi_1, \dots, Gi_m$, sehingga $A \subset \cup\, iGi_1 \cup \dots \cup Gi_m$.

Contoh 2.2.2

Misal A subset terhingga dari ruang topologi X, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Maka A adalah kompak. Hal tersebut kita tunjukkan sebagai berikut:

Bila $\mathcal{G} = \{G_i\}$ sampul buka dari A, maka tiap-tiap titik dalam A termasuk ke salah satu anggota dari $\mathcal{G}$, sebutlah $a_1 \in G_{i_1}, \cdots, a_m \in G_{i_m}$.

Jadi $A \subset \bigcup G_{i_1} \bigcup G_{i_2} \bigcup \cdots \cup Gi_m$.

2.3 Ruang Hausdorff (Ruang Topologi Terpisah)

Definisi 2.3.1(Chotim,1992:18)

Suatu ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dikatakan Hausdorff (atau terpisah) jika untuk setiap $x, y \in X, x \neq y$,terdapat $V_x \in N_x$ dan $V_y \in N_y$. $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Contoh 2.3.1

Dipunyai $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$suatu ruang topologi.

Akan dibuktikan $\mathbb{R}$ terpisah.

Bukti:

Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.

Di pilih $s = \frac{|x-y|}{100}$.

Bangun $V_x = [x - s, x + s]$ dan $V_y = [y - s, y + s]$.

Di pilih $U_x = [x - s, x + s] \in \mathcal{U}$ dan $U_y = [y - s, y + s] \in \mathcal{U}$.

Jadi $\exists\, U_x, U_y \in \mathcal{U}$ sehingga $x \in U_x \subset V_x$ dan $y \in U_y \subset V_y$.

Jadi $V_x \in \mathcal{N}(x)$ dan $V_y \in \mathcal{N}(y)$.

Jelas $V_x \cap V_y = [x - s, x + s] \cap [y - s, y + s]$.

Jelas maks $V_x -$ min $V_y = x + s - y + s$.

$$= x - y + 2s.$$

$$= x - y + 2\frac{|x - y|}{100}$$

$$= x - y + \frac{y - x}{50}$$

$$= \frac{49}{50}(x - y)$$

$$< 0$$

Jadi $maks\ V_x < min\ V_y$.

Jadi $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Jadi $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists\, V_x \in \mathcal{N}(x)$ dan $V_y \in \mathcal{N}(y)$, $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Jadi $\mathbb{R}$ suatu ruang Hausdorff.

Definisi 2.3.2(Munkres, 1983:182)

Sebuah ruang X dikatakan **kompak lokal di x** jika terdapat himpunan bagian kompak $C \subset X$ yang memuat sebuah lingkungan dari x. Jika X kompak lokal untuk setiap titik-titiknya, X dikatakan **kompak lokal**.

Definisi 2.3.3(Munkres, 1983:183)

Misal X ruang Hausdorff yang kompak lokal. Terdapat titik diluar X, disimbolkan ∞ dan gabungannya dari X, dirumuskan $Y = X \cup \{\infty\}$. Topologi Y didefinisikan koleksi dari himpunan buka Y untuk semua himpunan dari tipe:

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

(1) U, dimana U adalah himpunan buka dari X.

(2) $Y - C$, dimana C adalah himpunan bagian kompak dari X.

Contoh 2.3.2

a. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah kompak lokal.

Titik x yang terletak di interval (a, b), termuat dalam interval $[a, b]$.

Karena $(a, b) \subset [a, b]$ maka $\forall x \in (a, b)$, maka $x \in [a, b]$.

Jadi $[a, b]$ lingkungan (a, b).

Jadi Himpunan bilangan Real $\mathbb{R}$ kompak lokal.

b. Himpunan bilangan rasional tidak kompak lokal.

Bukti:

Himpunan bilangan rasional tidak kompak lokal.

Karena jika diambil $x \in \mathbb{Q}$ dan dibangun $V_x \in \mathcal{N}(x)$

dengan $V_x = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Menurut hukum kepadatan bilangan real $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ maka $\exists z \notin \mathbb{Q}$,

sehingga $z \in V_x$ dan $z \notin \mathbb{Q}$.

Jadi $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \exists V_x \in \mathcal{N}(x) \ni V_x \not\subset \mathbb{Q}$.

Jadi himpunan bilangan rasional tidak mempunyai titik interior.

Jadi bilangan rasional bukan kompak lokal.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang penulis gunakan adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

3.1 Menentukan Masalah

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan yang akan dikaji.

3.2 Perumusan Masalah

Masalah yang ditemukan kemudian dirumuskan kedalam pertanyaan yang harus diselesaikan yaitu:

3. Apakah setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup?
2. Bagaimana sifat kompak dan aplikasi dari ruang Hausdorff?

Perumusan masalah di atas mengacu pada beberapa pustaka yang ada. Selanjutnya dengan menggunakan pendekatan teoritik maka dapat ditemukan jawaban permasalahan sehingga tercapai tujuan penulisan skripsi.

3.3 Studi Pustaka

Dalam langkah ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam menyelesaikan

masalah, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

3.4 Analisis dan Pemecahan Masalah

Dari berbagai sumber pustaka yang sudah menjadi bahan kajian, diperoleh suatu pemecahan masalah di atas. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut.

1. Mencari teorema bahwa setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup.
2. Menuliskan sifat kompak pada ruang Hausdorff, beserta bukti dan penerapannya dalam aplikasi soal.

3.5 Penarikan Simpulan

Langkah terakhir dalam metode penelitian adalah penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil langkah pemecahan masalah.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Hausdorff

1. Ruang Hausdorff adalah suatu ruang topologi $(X,\mathcal{T})$ jika untuk setiap $x, y \in X, x \neq y$, terdapat $V_x \in N_x$ dan $V_y \in N_y$. $V_x \cap V_y = \emptyset$.
2. Himpunan A kompak apabila setiap sampul (cover) buka dari A tereduksi ke sampul terhingga. Dengan kata lain, bila A kompak maka terdapat himpunan buka Gi dengan $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} Gi$. Misalkan $Gi_1, \ldots, Gi_m$, sehingga $A \subset \cup iGi_1 \cup \ldots \cup Gi_m$.

Teorema 4.1 (Munkres, 1983:166)

Setiap himpunan bagian kompak dari ruang hausdorff adalah tertutup.

Bukti:

Dipunyai A himpunan kompak dari ruang hausdorff X.

Andaikan $A \neq \emptyset$.

Jelas $y \in A^c$.

Jelas $y \subset U_y$.

Jadi $y \subset U_y \in A^c$.

Jadi di tulis $A^c = \bigcup_{y \in A^c} U_y$.

Jelas $A, \emptyset \in$ ruang topologi.

Jadi $A, \emptyset$ terbuka.

Jadi $A^c = \emptyset$.

PERPUSTAKAAN UNNES

Jadi A^c terbuka.

Jadi A tertutup.

4.2 Sifat Kompak Ruang Hausdorff dan Aplikasinya.

Teorema 4.2 (Munkres, 1983:184)

Misal X ruang Hausdorff kompak lokal yang tidak kompak, dan Y adalah sebuah titik pengkompak X. Maka Y adalah ruang Hausdorff kompak ; X adalah subruang Y ; Himpunan $Y - X$ terdiri atas sebuah titik dan $\bar{X} = Y$.

Bukti:

(1) Akan ditunjukkan X subruang Y dan $\bar{X} = Y$.

Diberikan himpunan terbuka Y yang irisannya dengan X terbuka di X.

Karena $U \cap X = U$ dan $(Y - C) \cap X = X - C$, keduanya terbuka di X.

Sebaliknya, setiap himpunan terbuka X adalah sebuah himpunan buka U dan terbuka di Y.

Karena X tak kompak, tiap himpunan terbuka $Y - C$ memuat titik ∞ irisan X.

Dengan ∞ titik limit Y.

Jadi $\bar{X} = Y$.

(2) Akan ditunjukkan Y kompak.

Misalkan $\mathcal{a}$ adalah lingkungan terbuka Y .

Kumpulan $\mathcal{a}$ harus memuat himpunan terbuka $Y - C$.

Karena sebuah himpunan buka U tidak memuat ∞.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Ambil semua anggota a yang bukan anggota $Y - C$

dan beririsan dengan X.

Akan membentuk sebuah koleksi dari himpunan terbuka

dari $X \ni C$.

Karena C kompak, secara terbatas memuat di C.

Semua anggota berhingga dari $a$dan $Y - C$ memuat semua Y.

(3) Akan ditunjukkan Y Hausdorff.

Misalkan $x, y \in Y$.

Jika $x, y \in X$, maka himpunan terbuka $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{V}$ di X disjoint.

Ambil $x \in X$ dan $y \in \infty$.

Dapat dipilih himpunan kompak C di X yang memuat

lingkungan U dari x.

Jadi U dan $Y - C$ disjoint dengan lingkungan x dan ∞ di Y.

Contoh 4.2 (Aplikasi Soal)

Dalam pembahasan akan di buktikan bahwa $([a,b],\mathcal{T})$ dengan $\mathcal{T} = \mathcal{P}([a,b])$ suatu himpunan kompak dalam ruang Hausdorff.

1. Akan di buktikan $([a,b],\mathcal{T})$ suatu Ruang Topologi, yang meliputi:

   (c_1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $X \in \mathcal{T}$,

   (c_2) jika A dan B di $\mathcal{T}$, maka $A \cap B \in \mathcal{T}$,

   (c_3) jika $(A_i)_{i \in I}$ suatu puak unsur- unsur dari $\mathcal{T}$, maka $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

   a) Pembahasan untuk (c_1)
   Dipunyai selang tutup $[a,b]$ dan $\mathcal{T} = \mathcal{P}([a,b])$.

Jelas $\mathcal{P}([a,b]) = \{A | A \subset [a,b]\}$.

Jelas $\emptyset \subset [a,b]$ dan $[a,b] \subset [a,b]$.

Jelas $\emptyset \in \mathcal{P}([a,b])$ dan $[a,b] \in \mathcal{P}([a,b])$.

Jadi $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $[a,b] \in \mathcal{T}$.

Jadi (c_1) dipenuhi.

b) Pembahasan untuk (c_2).

Ambil sembarang A dan B di $\mathcal{T}$.

Jelas $A \subset [a,b]$ dan $B \subset [a,b]$.

Ambil sembarang $x \in (A \cap B)$.

Jelas $x \in A$ dan $x \in B$.

Jadi $x \in [a,b]$.

Jadi $\forall x \in (A \cap B), x \in [a,b]$.

Jadi $(A \cap B) \subset [a,b]$.

Jadi $(A \cap B) \in \mathcal{T}$.

Jadi (c_2) dipenuhi.

c) Pembahasan untuk (c_3).

Ambil sembarang puak $(A_i)_{i \in I}$ di $[a,b]$.

Jelas $A_i \in \mathcal{T} \forall\, i \in I$.

Jadi $A_i \subset [a,b] \forall\, i \in I$.

Kasus $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$:

Jelas $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Jadi $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Kasus $\bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$:

Ambil sembarang $x \in \bigcup_{t \in I} A_t$.

Jelas $x \in A_{t_0}$ untuk suatu $t_0 \in I$.

Jadi $x \in [a, b]$.

Jadi $\forall x \bigcup_{t \in I} A_t$, $x \in [a, b]$.

Jadi $\bigcup_{t \in I} A_t \subset [a, b]$.

Jadi $\bigcup_{t \in I} A_t \in \mathcal{T}$.

Jadi (c_3) dipenuhi.

Jadi $\mathcal{T}$ merupakan suatu Ruang Topologi pada $[a, b]$.

2. Akan dibuktikan $([a, b], \mathcal{T})$ suatu Ruang Hausdorff.

Ambil sembarang x dan y di $[a, b]$ dengan $x \neq y$.

a) Kasus $x < y$:

Di pilih $\varepsilon = \frac{y-x}{4}$.

Bangun $V_x = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ dan $V_y = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Jelas $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathcal{N}(x)$ dan $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \in \mathcal{N}(x)$.

Akan dibuktikan $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = \emptyset$.

Andaikan $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Ambil sembarang $a \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Jelas $a \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ dan $a \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Jadi $x - \varepsilon < a < x + \varepsilon$ dan $y - \varepsilon < a < y + \varepsilon$.

Jelas $y - \varepsilon < a < x + \varepsilon$.

Jelas $y - \varepsilon < x + \varepsilon$.

$$\Leftrightarrow y - \frac{y-x}{4} < x + \frac{y-x}{4}$$

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

$\Leftrightarrow \frac{4y-y+x}{4} < \frac{4x+y-x}{4}$

$\Leftrightarrow 3y + x < 3x + y$

$\Leftrightarrow y < x.$

Ini suatu kontradiksi, Jadi pengandaian salah.

Jadi $(x - s, x + s) \cap (y - s, y + s) = \emptyset$.

Jadi $\forall x, y \in [a, b]\ \exists\ x \in \mathcal{N}(x)$ dan $(y - s, y + s) \in \mathcal{N}(y) \ni (x - s, x + s) \cap (y - s, y + s) = \emptyset$

.

Jadi $([a, b], \mathcal{T})$ suatu Ruang Hausdorff.

b) Kasus $y < x$:

Di pilih $s = \frac{x-y}{4}$.

Bangun $V_x = (x - s, x + s)$ dan $V_y = (y - s, y + s)$.

Jelas $(x - s, x + s) \epsilon \mathcal{N}(x)$ dan $(y - s, y + s) \epsilon \mathcal{N}(x)$.

Akan dibuktikan $(y - s, y + s) \cap (x - s, x + s) = \emptyset$.

Andaikan $(y - s, y + s) \cap (x - s, x + s) \neq \emptyset$.

Ambil sembarang $a \in (y - s, y + s) \cap (x - s, x + s)$.

Jelas $a \in (y - s, y + s)$ dan $a \in (x - s, x + s)$.

Jadi $y - s < a < y + s$ dan $x - s < a < x + s$.

Jelas $x - s < a < y + s$.

Jelas $x - s < y + s$.

$\Leftrightarrow x - \frac{x-y}{4} < y + \frac{x-y}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{4x-x+y}{4} < \frac{4y+x-y}{4}$

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

$\Leftrightarrow 3x + y < 3y + x$

$\Leftrightarrow x < y$.

Ini suatu kontradiksi.

Jadi pengandaian salah.

Jadi $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$.

Jadi $\forall x, y \in [a, b]\ \exists\ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathcal{N}(x)$ dan

$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \in \mathcal{N}(y)$

$\ni (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$.

Jadi $([a, b], \mathcal{T})$ suatu Ruang Hausdorff.

3. Akan dibuktikan $[a, b]$ kompak.

Ambil sembarang selimut buka $(U_i)_{i \in I}$ di $[a, b]$.

Bangun $Y = \{y | y \in (a, b]\}$ sehingga $[a, y] \subset (U_i)_{i \in I}$ untuk suatu himpunan hingga $F \subset I$.

Jelas $a < b$.

Tulis $b = a + c$ untuk $c \in R^+$.

Jelas $a < a + \frac{c}{2} < a$.

Karena $a + \frac{c}{2} \in Y$ maka $Y \neq \emptyset$.

Tulis $Sup = Y + \beta$.

Jelas $Y \subset [a, b]$.

Ambil sembarang $x \in [a, b]$.

Ambil sembarang $V_x \in \mathcal{N}(x)$/

Pilih $U = (c, d)$sehingga $x \in (c, d) \subset V_x$.

Jadi $c < x < d$.

Di pilih $y = \frac{x+d}{2}$.

Jelas $y \in (x, d)$.

Jadi $y \in (x, d) \subset V_x$.

Jadi $y \in V_x$.

Di pilih $y \in [a, b]$ sehingga $y \in V_x$.

(a) Kasus $x = a$:

Dipunyai $Y = (a, b]$.

Ambil sembarang $V_a \in \mathcal{N}(a)$.

Pilih $U_a = (p, q)$ sehingga $a \in (p, q) \subset V_a$

Jelas $p < a < q$.

Di pilih $y = \frac{a+q}{2}$.

Jelas $y \in (a, q)$.

Jadi $y \in (a, q) \subset V_a$ dan $y \in (a, b]$.

Karena $y \in V_a$ dan $y \in (a, b]$ maka $y \in (V_a \cap (a, b])$.

Jadi $V_a \cap (a, b] \neq \emptyset$.

Jadi $a \in \overline{(a, b]}$.

Jadi $a \in \bar{Y}$.

Jadi $a \in [a, b], a \in \bar{Y}$.

Jadi $[a, b] \subset \bar{Y}$.

(b) Kasus $x = b$:

Dipunyai $Y = (a, b]$.

Ambil sembarang $V_b \in \mathcal{N}(b)$.

Di pilih $U_b = (r, s)$ sehingga $b \in (r, s) \subset V_b$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Jelas $r < b < s$.

Di pilih $z = \frac{r+b}{2}$.

Jelas $z \in (r, b)$.

Jadi $z \in (r, b) \subset V_b$ dan $z \in (a, b]$.

Karena $z \in V_b$ dan $z \in (a, b]$ maka $z \in (V_b \cap (a, b])$.

Jadi $V_b \cap (a, b] \neq \emptyset$.

Jadi $b \in \overline{(a, b]}$.

Jadi $b \in \bar{Y}$.

Jadi $b \in [a, b], b \in \bar{Y}$.

Jadi $[a, b] \subset \bar{Y}$.

(c) Kasus $a < x < b$:

Dipunyai $Y = (a, b]$.

Ambil sembarang $V_x \in \mathcal{N}(x)$.

Jadi $x \in V_x$ dan $x \in (a, b]$.

Karena $x \in (V_x \cap (a, b])$ maka $V_x \cap (a, b] \neq \emptyset$.

Jadi $x \in \overline{(a, b]}$.

Jadi $x \in \bar{Y}$.

Karena $x \in [a, b], x \in \bar{Y}$ maka $[a, b] \subset \bar{Y}$.

Jadi $[a, b] \subset \bar{Y}$.

Ambil sembarang $y \in \bar{Y}$.

Ambil sembarang $V_y \in \mathcal{N}(y)$.

Jelas $V_y \cap Y \neq \emptyset$.

Jadi $y \in V_y$dan $y \in Y$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Karena $Y = (a,b] \subset [a,b]$ maka $y \in [a,b]$

Karena $y \in \bar{Y}, y \in [a,b]$ maka $\bar{Y} \subset [a,b]$.

Jadi $\bar{Y} = [a,b]$.

(d) Akan ditunjukkan $Sup\ Y \in Y$.

Tulis Sup $Y = \beta$.

Jadi $x \leq \beta\ \forall x \in Y$.

Ambil sembarang $V_\beta \in \mathcal{N}(\beta)$.

Di pilih $U_\beta = (m,n)$ sehingga $\beta \in (m,n) \subset V_\beta$.

Jadi $m < \beta < n$.

Di pilih $X_\beta = \frac{m+\beta}{2}$.

Jadi $X_\beta \in (m,n) \subset V_\beta$ dan $X_\beta \in (a,b]$.

Karena $X_\beta \in V_\beta \cap (a,b]$.

Jadi $V_\beta \cap (a,b] \neq \emptyset\ \forall\ V_\beta \in \mathcal{N}(\beta)$.

Karena $\beta \in \overline{(a,b]}$ maka $\beta \in [a,b]$

Karena $\beta \in U_{t_0}$ untuk suatu $t_0 \in I$ maka U_{t_0} buka.

Jadi U_{t_0} suatu lingkungan β.

Di pilih $U_\beta = (c.d)$ sehingga $\beta \in (c.d) \subset U_{t_0}$.

Dipunyai $\beta = \sup Y$.

Jadi $c < y < \beta$.

Di pilih himpunan hingga $H \subset I$ sehingga

$[a,y] \subset (U_t)_{t \in H}$.

Bangun $K = H \cup \{t_0\}$.

Jelas $[a, \beta] \subset [a, y] \cup U_{i_0} \subset (U_i)_{i \in K}$.

Jadi $Sup\ Y \in Y$.

Akan dibuktikan Sup $Y = \beta = b$.

(1) Andaikan $\beta > b$.

Dipunyai $\beta = Sup\ Y, [a, y] \subset [a, b]$ dan $b \subset \beta$.

Jelas $\beta \neq [a, b]$.

Ini suatu kontradiksi.

Jadi $\beta \leq b$.

(2) Andaikan $\beta < b$.

Di pilih himpunan hingga $K \subset I$

sehingga $[a, b] \subset \bigcup_{i \in K} U_i$.

Jadi $\beta \in U_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in K$.

Di pilih (p, q) sehingga $\beta \in (p, q) \subset U_{i_0}$.

Di pilih $z \in [a, b)$ sehingga $\beta < z < q$.

Jadi $(U_i)_{i \in K}$ masih merupakan selimut hingga $[a, z]$.

Jadi $z \in Y$.

Jelas $\beta = Sup\ Y$ dan $z > \beta$.

Ini suatu kontradiksi.

Jadi pengandaian salah.

Jadi $\beta = b$.

Di pilih himpunan hingga $L \subset I$

sehingga $[a, b] \subset (U_i)_{i \in L}$.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

Jadi terdapat himpunan hingga $L \subset I$ sehingga $(U_i)_{i \in L}$ masih merupakan selimut dari $[a, b]$.

Jadi $\forall$ selimut buka $(U_i)_{i \in I}$ $\exists$ himpunan hingga $L \subset I$ sehingga $(U_i)_{i \in I}$ masih merupakan selimut dari $[a, b]$.

Dari (a), (b), (c), dan (d) diperoleh $[a, b]$ merupakan himpunan kompak.

Jadi terbukti bahwa $([a, b], \mathcal{T})$ dengan $\mathcal{T} = \mathcal{P}([a, b])$ merupakan suatu himpunan kompak dalam Ruang Hausdorff.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Dari hasil penelitian dan pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup.
2. Sifat Kompak dan Aplikasinya Ruang Hausdorff adalah sebagai berikut.
   a. Sifat Kompak

      Misal X ruang Hausdorff kompak lokal yang tidak kompak, dan Y adalah sebuah titik pengkompak X. Maka Y adalah ruang Hausdorff kompak ; X adalah subruang Y ; Himpunan $Y - X$ terdiri atas sebuah titik dan $\bar{X} = Y$.

   b. Aplikasi

      Dalam aplikasi soal terbukti bahwa $([a,b],\mathcal{T})$ dengan $\mathcal{T} = \mathcal{P}([a,b])$ merupakan suatu himpunan kompak dalam ruang Hausdorff.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

5.2 Saran

1. Perlu diadakan pengkajian lebih lanjut apakah ada teorema lain yang dapat digunakan untuk menentukan apakah Setiap himpunan kompak pada ruang Hausdorff adalah tertutup.
2. Perlu diadakan pengkajian lebih lanjut apakah ada soal lain yang dapat memenuhi teorema dan definisi dari sifat kompak pada ruang Hausdorff yang tidak di bahas oleh penulis.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES

DAFTAR PUSTAKA

Chotim, Moch, 1992. ***Topologi Bagian 1***. Unnes, Semarang.

Kartono, Nurwiyati,F.W, 1995, ***Pengantar Topologi***, Andi Offset, Yogyakarta.

Wahyudin, 1987, ***Dasar- Dasar Topologi***, Tarsito, Bandung.

Walter, Rudin, 1976, ***Principles of Mathematical Analysis***, Third Edition, Erlangga, Jakarta.

R.Munkres, James, 1983, ***Topology A First Course***, Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
PERPUSTAKAAN
UNNES